Área de Publicação: Matemática

TERMO GERAL DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E OS INCRÍVEIS CARTÕES MÁGICOS

MEIRA DE FREITAS, Otacilia[1]; DORNELLAS DIAS, Leticia[2]; CORDEIRO DE MORAIS FILHO, Daniel[3]

[1]Matemática – UFCG; e-mail: otaciliameira@hotmail.com
[2]Matemática – UFCG; e-mail: leleluinha@hotmail.com
[3]Matemática – UFCG

RESUMO

Em nosso trabalho temos o objetivo de exibir Cartões Mágicos usando a Sequência de Fibonacci, que se diferenciam dos cartões mágicos binários por ser mais difícil de descobrir o truque. A ideia de se trabalhar a Sequência de Fibonacci com esses cartões foi idealizada pelo professor de Matemática Dr. Rogério Ricardo Steffenon, que tomou por base o Teorema de Zeckendorf, garantindo que todo número inteiro positivo pode ser escrito, de modo único, como a soma de termos da sequência de Fibonacci, de índices não consecutivos e maiores do que 2. Além disto, sabemos que a Sequência de Fibonacci é definida de forma recursiva, porém, para números suficientemente grandes, a descoberta de valores de termos da sequência pode ser laboriosa, por isto se faz pertinente ter uma forma geral, que iremos apresentar em nosso trabalho.

PALAVRAS-CHAVE: Cartões Mágicos. Sequência. Fibonacci.

1. INTRODUÇÃO

Na Matemática temos uma descoberta fascinante, e bem conhecida, a Sequência de Fibonacci. No livro Liber Abaci, escrito por Leonardo Fibonacci, é apresentado o seguinte problema: “Um certo homem tem um par de coelhos num determinado local cercado, e se quer saber quantos coelhos são gerados por esse par num ano, quando é natural que eles gerem num mês outro par, e no segundo mês, os que nasceram, geram também”. Umas das condições dadas é que esses coelhos não morrem.

Assim, temos

Tabela 1 – Quantidade de casais de coelhos.

Mês	Quantidade
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
...	...
12	144

Desta forma concluímos que $F_{12} = F_{11}+F_{10}$. E para saber quantos coelhos teríamos no *n*-ésimo mês, temos

$$F_n = F_{n-1}+F_{n-2}\ ,$$

onde esta igualdade define recursivamente a Sequência de Fibonacci, com $F_0= 0$ e $F_1=1$.

Por outro lado, para números suficientemente grandes, a descoberta de tal valor pode ser laboriosa, por isto é necessário ter uma forma geral para este *n-ésimo* termo.

Apresentado essa forma geral neste trabalho e tomamos como base o Teorema 1, onde demonstramos utilizando o Segundo Princípio de Indução. Uma vez que, para determinar um termo da Sequência de Fibonacci, precisamos dos dois termos anteriores, condição que o Primeiro Princípio de Indução não se aplica.

Além disso, apresentamos uma aplicação da Sequência de Fibonacci, usando novos tipos de cartões mágicos, pouco usais. A ideia usar a Sequência nesses novos cartões foi idealizada pelo professor de Matemática Dr. Rogério Ricardo Steffenon (Vide [2]), que tomou por base o Teorema de Zeckendorf, garantindo que todo número inteiro positivo pode ser escrito, de modo único, como a soma de termos da sequência de Fibonacci, de índices não consecutivos e maiores do que 2.

2. METODOLOGIA

Este trabalho é proveniente de uma atividade do Grupo Pet Matemática – UFCG. Para o desenvolvimento do trabalho foi necessário a leitura de livros, e de textos em língua estrangeira, pesquisa em sites e orientação do tutor.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Teorema 1: Seja F_n o *n-ésimo* termo da Sequência de Fibonacci, então

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) \quad \text{(I)}$$

Para todo $n \geq 0$, onde

$$\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\ ,\ \beta = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

Demonstração:

Para demonstração do teorema usaremos o Segundo Princípio de indução sobre *n*, *n* natural. Assim, se $n = 0$ em *(I),* temos

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^0 - \beta^0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0$$

Se $n = 1$ em *(I)* temos

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^1 - \beta^1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right) - \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$$

Logo, o resultado é válido para $n = 0$ e $n = 1$.

Suponha que a equação *(I)* é válida para todo k natural, tal que $2 \leq k < n$. Queremos provar que a equação *(I)* é válida para n, assim temos

$$
\begin{aligned}
F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}) - (\beta^{n-1} + \beta^{n-2})] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^{n-2}(\alpha + 1) - \beta^{n-2}(\beta + 1)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^{n-2} \cdot \alpha^2 - \beta^{n-2} \cdot \beta^2] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)
\end{aligned}
$$

Portanto, obtemos o resultado, com o uso do Segundo Princípio de Indução.

■

Sobre os cartões mágicos

São bastante conhecidos os cartões mágicos binários, 6 cartões cujo primeiro número de cada cartão é uma potência de 2, e o segredo está no fato de que todo número natural pode ser escrito como soma de potências de 2. Surge o questionamento: Será também podemos criar cartões mágicos com os números da Sequência de Fibonacci? Sim! E o que nos garante isto é o Teorema de Zeckendorf! Apresentado e demonstrado abaixo.

Teorema 2 (Teorema de Zeckendorf): Todo número natural pode ser escrito de modo único como a soma de termos da Sequência de Fibonacci, de índices não consecutivos e maiores que 2.

Demonstração:

Inicialmente, mostramos a existência da representação, utilizamos o Segundo Princípio de Indução, e aplicamos indução em n. Temos:

$$0 = F_0 \,;\, 1 = F_1 = F_2 \,;\, 2 = F_3 + F_0 \,;\; 3 = F_0 + F4 \,;\, 4 = F_2 + F_4 \,;$$
$$5 = F_0 + F_5 \,;\; 6 = F_2 + F_5$$

Com isso temos que o resultado é válido para $n \leq 6$.

Suponha que o resultado é válido para certo $k > 6$. Iremos mostrar que é válido para $k+1$. Se $k+1$ é um termo da Sequência de Fibonacci, então o resultado está provado, pois $k+1 = F_0 + F_{K+1}$. Caso não seja, então existe um j, tal que

Logo,

$$F_j < k+1 < F_{j+1}.$$

Desta forma, considere

$$a := k+1 - F_j < F_{j-1},$$

donde segue

$$F_j + a = k+1 < F_{j+1} = F_j + F_{j-1},$$

ou seja,

$$a < F_{j-1}.$$

Como $a < F_{j-1}$, segue que $k+1 = F_j + a$ não é soma de termos consecutivos da Sequência de Fibonacci. Como $a = k+1 + F_j < k$, o resultado é válido para k e, portanto, vale para k+1 da igualdade anterior.

Portanto, pelo Segundo Princípio de Indução, todo número natural pode ser escrito como a soma de termos da sequência de Fibonacci de índices não consecutivos e maiores do que 2.

Provemos a unicidade da representação.

Suponha que a representação é única até um certo k. Considere que para k+1 existam duas representações, desta forma

$$k+1 = F_{a_0} + F_{a_1} + \cdots + F_r = F_{b_0} + F_{b_1} + \cdots + F_{b_s},$$

com, $a_i + 1 < a_{i+1}$ e $b_j + 1 < b_{j+1}$.

Temos,

$$F_{a_r} \leq F_{a_0} + F_{a_1} + \cdots + F_{a_r} = F_{b_0} + F_{b_1} + \cdots + F_{b_s} \leq F_{b_s} + F_{b_s-2} + \cdots + F_t = F_{b_s+1} - 1,$$

onde,

$$t = \begin{cases} 2, se\ b_s\ é\ par \\ 3, se\ b_s\ é\ ímpar \end{cases}$$

Logo,

$$F_{a_r} < F_{b_s+1},\ \text{e assim}\ a_r < b_s + 1, \text{ou seja,}\ a_r \leq b_s.$$

Analogamente, podemos mostrar que $b_s \leq a_r$. Portando $a_r = b_s$. Além disso, temos

$$F_{a_0} + F_{a_1} + \cdots + F_{a_{r-1}} + F_{a_r} = F_{b_0} + F_{b_1} + \cdots + F_{b_{r-1}} + F_{b_r}$$

$$\Rightarrow F_{a_0} + F_{a_1} + \cdots + F_{a_{r-1}} = F_{b_0} + F_{b_1} + \cdots + F_{b_{r-1}} \leq k$$

Logo, segue da hipótese de indução e de $a_r = b_s$ que a representação é única.

■

Vejamos os cartões mágicos

1	4	6	9	12	14
17	19	22	25	27	30
33	35	38	40	43	46
48	51	53	56	59	61
64	67	69	72	74	77
80	82	85	88	90	93
95	98	101	103	106	108
111	114	116	119	122	124

2	7	10	15	20	23
28	31	36	41	44	49
54	57	62	65	70	75
78	83	86	91	96	99
104	109	112	117	120	125
130	133	138	143	146	151
154	159	164	172	175	180
185	188	193	198	201	206

3	4	11	12	16	17
24	25	32	33	37	38
45	46	50	51	58	59
66	67	71	72	79	80
87	88	92	93	100	101
105	106	113	114	121	122
126	127	134	135	139	140

5	6	7	18	19	20
26	27	28	39	40	41
52	53	54	60	61	62
73	74	75	81	82	83
94	95	96	107	108	109
115	116	117	128	129	130
141	142	143	149	150	151

8	9	10	11	12	29
30	31	32	33	42	43
44	45	46	63	64	65
66	67	84	85	86	87
88	97	98	99	100	101
118	119	120	121	122	131
132	133	134	135	152	153

13	14	15	16	17	18
19	20	47	48	49	50
51	52	53	54	68	69
70	71	72	73	74	75
102	103	104	105	106	107
108	109	136	137	138	139
140	141	142	143	157	158

21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32
33	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86
87	88	110	111	112	113
114	115	116	117	118	119
120	121	122	165	166	167

34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51
52	53	54	123	124	125
126	127	128	129	130	131
132	133	134	135	136	137
138	139	140	141	142	143

55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	199	200
201	202	203	204	205	206

89	90	91	92	93	94
95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106
107	108	109	110	111	112
113	114	115	116	117	118
119	120	121	122	123	124
125	126	127	128	129	130

Como funciona a mágica? Bom, suponha que iremos descobrir a idade de alguém, mostraremos cada um dos cartões para o nosso voluntário, e então ele dirá em quais cartões estará a sua idade.

Ao final das perguntas, seremos capazes de dizer a idade de nosso voluntário, contanto que o voluntário tenha menos de 130 anos, pois, se olharmos com carinho e atenção, veremos que o primeiro número de cada cartão é um número da sequência de Fibonacci, então para realizar a mágica, basta somarmos os primeiros números de cada cartão. Portanto podemos utilizar o teorema de Zeckendorf para o funcionamento da mágica.

REFERÊNCIAS

1. ROTMAN. Joseph J. *Journey Into Mathematics: An Introduction to Proofs*. Mineola, New York. Dover, 2007
2. STEFFENON. R.R. *Belos Problemas de Matemática: Indução e Contagem*; 2016

AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de agradecer ao Grupo PET-MATEMÁTICA-UFCG pela oportunidade dada para o desenvolvimento deste trabalho, pelo apoio e incentivo por parte de todo os integrantes. Agradecemos especialmente ao nosso excelentíssimo Tutor, o professor Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho pela orientação e apoio, não só neste trabalho, mas como em nossas vidas acadêmicas. Agradecemos também a todos os professores e funcionários da UAMat, por todo o conhecimento transmitido e por todas as experiências vividas.